

Capítulo Segundo

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

55. El agua y el aire
56. El líquido más ligero
57. El problema de Arquímedes
58. La compresibilidad del agua
59. Disparando al agua
60. Una bombilla eléctrica debajo de un vehículo
61. Dos cilindros flotando en el mercurio
62. Inmersión en la arena movediza
63. Forma esférica del líquido
64. Una gota de agua
65. La elevación capilar
66. En un tubo inclinado
67. Gotas en movimiento
68. Una lámina colocada en el fondo de un recipiente con líquido
69. Ausencia de tensión superficial
70. La tensión superficial
71. El grifo
72. La velocidad de salida
73. El problema de la bañera
74. Vórtices en el agua
75. La riada y el estiaje
76. El oleaje
77. El problema de Colladon



55. El agua y el aire.

¿Qué pesa más, la atmósfera del globo terráqueo o toda el agua que hay en él? ¿Cuántas veces?

Un cálculo bastante sencillo permite determinar grosso modo la razón de la masa de la atmósfera con respecto a la de toda la reserva de agua de nuestro planeta. El peso de la atmósfera equivale al de una capa de agua de unos 10 m (0,01 km) de espesor, que cubre uniformemente toda la superficie del Globo. Si el radio de la Tierra es R km, la masa de aire que la rodea (medida en miles de millones de toneladas) ha de ser igual a

$$4\pi R^2 * 0.01 = 0.04\pi R^2$$

Los océanos, midiendo 4 km de profundidad por término medio, ocupan los 3/4 de la superficie terrestre. De modo que la masa del agua de todos ellos es igual (en miles de millones de toneladas) a

$$\frac{3}{4} * 4pR^2 * 4 = 12pR^2$$

La razón incógnita equivale a

$$12pR^2 : 0.04pR^2 = 300$$

Así pues, toda el agua que hay en el Globo pesa unas 300 veces más que todo el aire (más exactamente, 270 veces más).

56. El líquido más ligero.

Indíquese el líquido más ligero.

Entre los líquidos el que menor densidad tiene es el hidrógeno licuado: 0,07 g/cm³; éste es catorce veces más ligero que el agua, o sea, aproximadamente tantas veces como el agua es más ligera que el mercurio. Entre los líquidos en el segundo lugar está el helio licuado cuya densidad es de 0,15 g/cm³.

57. El problema de Arquímedes.

Se conocen varias versiones del problema de la corona de oro. Vitruvio, arquitecto de la antigua Grecia (siglo I a.C.), la refiere de la manera siguiente:

«Cuando Hierón II¹ llegó al poder, decidió donar una corona de oro a un templo en agradecimiento por los hechos venturosos; ordenó fabricarla a un orífice y le entregó el material necesario. El maestro cumplió el encargo para el día fijado. El rey estuvo muy satisfecho: la obra pesaba justamente lo mismo que el material que había sido entregado al orfebre. Pero poco tiempo después el soberano se enteró de que este último había robado cierta parte del oro sustituyéndolo con plata. Hierón montó en cólera y pidió a Arquímedes que inventara algún método para descubrir el engaño.

Pensando en este problema, el sabio fue a las termas y, una vez en la bañera, echo de ver que se desbordó cierta cantidad de agua, correspondiente a la profundidad a la que se hundió su cuerpo. Al descubrir de esa manera la causa del fenómeno, no siguió en las termas, sino que se lanzó a la calle, rebotando de alegría y en cueros, y corrió hasta su casa exclamando en alta voz: '¡Eureka!, ¡eureka!' (hallé).

Cuando llegó a su casa, Arquímedes tomó dos pedazos del mismo peso que la corona, uno de oro y otro de plata, llenó con agua un recipiente hasta los bordes y colocó en él el lingote de plata. Acto seguido lo sacó y echó en el recipiente la misma cantidad de agua que se desbordó, midiéndola previamente, hasta llenarlo. De esta manera determinó el peso del trozo de plata que correspondía a cierto volumen de agua. A continuación realizó la misma operación con el trozo de oro y, volviendo a añadir la cantidad de agua desbordada, concluyó que esta vez se derramó menos líquido en una cantidad equivalente a la diferencia de los volúmenes de los trozos de oro y plata de pesos iguales.

Después volvió a llenar el recipiente, colocó en él la corona y se dio cuenta de que se derramó una mayor cantidad de agua que al colocar el lingote de oro; partiendo de este exceso de líquido Arquímedes calculó el contenido de impurezas de plata, descubriendo de esa manera el engaño.»

¹ Rey de Siracusa; según refiere una tradición, era pariente de Arquímedes.

¿Se podría determinar la cantidad de oro sustituida por plata en la corona, utilizando el método de Arquímedes?

Según los datos disponibles, Arquímedes tenía derecho a afirmar que la corona no era de oro puro. No obstante, el siracusano no supo determinar con exactitud qué cantidad de oro había hurtado el orífice. La habría determinado si el volumen de la aleación de oro y plata fuera justamente igual a la suma de volúmenes de sus componentes. La leyenda atribuye a Arquímedes precisamente este criterio, compartido, por lo visto, por la mayoría de los autores de libros de texto escolares.

De hecho, sólo muy pocas aleaciones tienen esa propiedad. Por lo que atañe al volumen de la aleación de oro y plata, éste es menor que la suma de volúmenes de los componentes. En otras palabras, la densidad de semejante liga supera la que se obtiene por cálculo ateniéndose a las reglas de adición simple. Es fácil ver que al calcular la cantidad de oro hurtado en base a su experimento, Arquímedes debería obtener un resultado menor: a su modo de ver, la densidad más elevada de la aleación probaba que en ella era mayor la cantidad de oro. Por este motivo no pudo determinar exactamente la cantidad de oro con la cual se había quedado el estafador.

¿Cómo se debería resolver el problema planteado?

«Actualmente señala el Prof. Menshutkin en su Curso de Química General- procederíamos del modo siguiente.

Determinaríamos no sólo la densidad del oro y plata puros, sino también la de toda una serie de aleaciones de oro y plata cuya composición se conoce con exactitud. A continuación trazaríamos un diagrama a base de los datos obtenidos; éste nos proporcionaría la curva de variación de la densidad de las aleaciones de oro y plata dependiendo del contenido de componentes. En el caso dado se obtendría una recta, pues la densidad varía linealmente en base a la composición de la liga. Al determinar la densidad de la corona, señalaríamos el resultado obtenido en la curva de densidad del sistema oro-plata y definiríamos a qué composición de la aleación corresponde este dato, averiguando así la composición del metal de la corona.»

El caso sería distinto si parte del oro fuera sustituida con cobre y no con plata: el volumen de la aleación de oro y cobre vale exactamente la suma de volúmenes de sus componentes. En este caso el método de Arquímedes proporciona un resultado muy exacto.

58. La compresibilidad del agua.

¿Qué sustancia, el agua o el plomo, se comprime más bajo presión?

En los libros de texto escolares se subraya con tanta tenacidad la incompresibilidad de los líquidos que se inculca la idea de que realmente lo son, al menos en un grado menor que los sólidos. Pero de hecho el término «incompresibilidad» aplicado a los líquidos no es sino una expresión figurada para definir su insignificante reducción de volumen al ser presionados, además, éstos se comparan sólo con los gases. Si comparamos los líquidos y los sólidos en cuanto a la compresibilidad, resultará que los primeros son muchas veces más compresibles que los segundos.

El metal más compresible -el plomo- expuesto a la acción de una carga omnilateral, disminuye su volumen en 0,000006 del inicial bajo la presión de 1 at. El agua, en cambio, es unas ocho veces más compresible: su volumen disminuye en 0,00005 al aplicar la misma presión. Pero en comparación con el acero, este líquido se estrecha unas 70 veces más 1.

El ácido nítrico se distingue entre los líquidos por su elevada capacidad de compresión reduciendo su volumen inicial en 0,00034 a la presión de 1 at, es decir, al ser presionado reduce

su volumen unas 500 veces más que el acero. Sin embargo, la compresibilidad de los líquidos es decenas de veces menor que la de los gases.

59. Disparando al agua.

Una caja abierta, con paredes de madera contrachapada parafinadas por dentro, de unos 20 cm de largo y 10 cm de ancho, contiene agua hasta un nivel de 10 cm respecto a su fondo. Si se dispara contra la caja, se hace añicos, mientras que el agua se dispersa en forma de polvo finísimo.

¿Cómo se explicaría esta acción del impacto de bala?

Este fenómeno se atribuye a la compresibilidad insignificante de los líquidos y, además, a su elasticidad absoluta. La bala entra en el agua con tanta rapidez que su nivel no tiene tiempo para subir. Por tanto, el líquido se contrae instantáneamente en la magnitud del volumen del proyectil. La alta presión que se crea en este caso destroza las paredes del recipiente y pulveriza el agua que éste contiene.

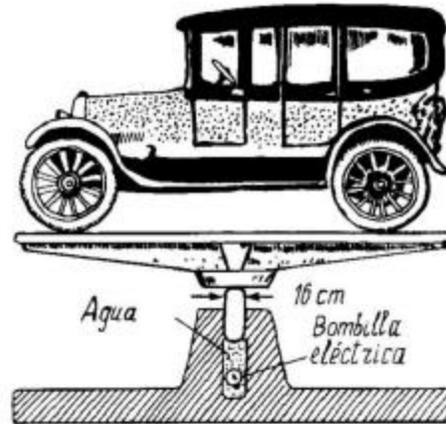
Una estimación simple proporciona cierta noción acerca de la magnitud de la presión. La caja contiene $20 \times 10 \times 10 = 2000 \text{ cm}^3$ de agua. El volumen de la bala es de 1 cm^3 . El líquido deberá comprimirse en $1/2000$ parte, o sea, en 0,0005 de su volumen inicial. A la presión de 1 at el mismo reduce su volumen en 0,00005, es decir, diez veces menos. Por consiguiente, cuando disminuye el volumen del líquido contenido en la caja, su presión deberá elevarse hasta 10 at; a esta magnitud asciende, aproximadamente, la presión de trabajo que se crea en el cilindro de una máquina de vapor. Es fácil calcular que cada una de las paredes y el fondo de la caja sufrirán la acción de una fuerza de 10.000 a 20.000 N.

Este hecho explica los enormes efectos destructivos que producen los obuses explotados bajo agua. «Si un obús explota aunque sea a 50 m de un submarino, pero a suficiente profundidad para que la fuerza explosiva no “se disipe” por la superficie del agua, el buque se destruye inminentemente» (R.A. Millikan).

60. Una bombilla eléctrica resistiendo el peso de un vehículo.

¿Puede una bombilla soportar una presión de media tonelada? El diámetro del émbolo es de 16 cm.

² A la presión de 25.000 at una columna de agua de 1 m de altura se comprime hasta 65 cm (experimentos de James Basset).



Calculemos la presión que experimentan las paredes de la bombilla. La sección del émbolo es

$$S = \frac{P}{4} * 16^2 = 201 \text{ cm}^2$$

Como el peso del vehículo es de 5000 N, a cada centímetro cuadrado de la superficie corresponderá la presión siguiente:

$$5000 : 201 \approx 25 \text{ N/cm}^2$$

Las bombillas ordinarias suelen resistir una presión más alta, de hasta 27 N/cm^2 . Por eso, si se cumplen las condiciones indicadas al plantear el problema, la ampolla quedará intacta. Este problema tiene importancia práctica en los trabajos que se llevan a cabo bajo agua. Una bombilla corriente, que resiste una presión de 2,7 at, puede ser utilizada a una profundidad de hasta 27 m (a profundidades mayores se emplean bombillas especiales).

61. Dos cilindros flotando en el mercurio.

Dos cilindros de masas y diámetros iguales, uno de aluminio y otro de plomo, se mantienen en el mercurio en posición vertical. ¿Cuál de ellos está hundido a mayor profundidad?

No piense que el quid del problema radica en la posición vertical de los cilindros: parecería que un cuerpo de forma cilíndrica no podría sostenerse verticalmente en el seno de un líquido, sino que tendría que ponerse de costado. Esta afirmación no es cierta: si un cilindro tiene diámetro suficientemente grande en comparación con su altura, puede flotar en posición estable.

De por sí, este problema no es difícil, pero a veces se suele razonar de forma equivocada al abordarlo. El cilindro de aluminio es cuatro veces más largo que el de plomo, de la misma masa y diámetro. Por eso podemos considerar que estando suspendido en posición vertical en el mercurio, deberá hundirse más que el de plomo. Por otra parte, este último, siendo más pesado, debería sumergirse más que el de aluminio que es más ligero.

Estas dos suposiciones son equivocadas: ambos sólidos están sumergidos a una misma profundidad. La causa de ello está a la vista: dado que tienen peso idéntico, deben desplazar iguales cantidades de líquido con arreglo al principio de Arquímedes; mas, como tienen diámetros iguales, la longitud de sus partes sumergidas también debe ser igual, pues en otro caso no desalojarían la misma cantidad de líquido.

Sería interesante saber, cuántas veces mayor será la parte del cilindro de aluminio que sobresale del azogue en comparación con la correspondiente del de plomo. Es fácil calcular que este último deberá sobresalir en 0,17 de su longitud, en tanto que el otro, en 0,8. Como el cilindro de aluminio es 4,2 veces más largo, las 0,8 de su longitud serán

$$\frac{0.8 * 4.2}{0.17} \approx 20 \text{ veces}$$

mayores que las 0,17 de la del otro.

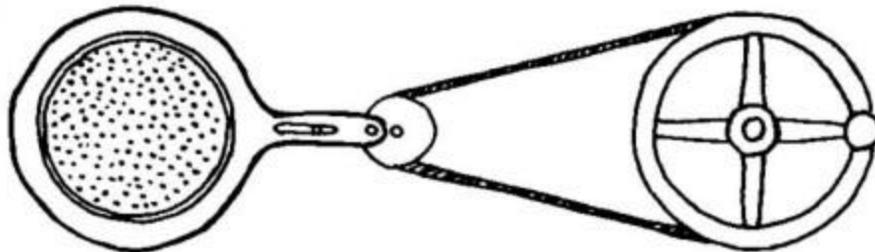
Así pues, la parte del cilindro de aluminio asomada del mercurio será veinte veces más larga que la respectiva parte del de plomo.

El ejercicio que acabamos de analizar tiene importancia en la teoría que pretende explicar la estructura del globo terráqueo, a saber, en la llamada teoría de isostasia. Ésta arranca del hecho de que las partes sólidas de la corteza terrestre son más ligeras que las masas plásticas subyacentes, por lo cual flotan a flor de estas últimas. Dicha teoría considera la corteza terrestre como un conjunto de prismas de sección y peso iguales, pero de diferente altura. Según ella, sus partes elevadas deben de corresponder a prismas de menor densidad, y las menos elevadas, a prismas de densidad mayor. Es evidente que, según nos hemos dado cuenta al resolver el problema, las elevaciones que se aprecian en la superficie terrestre, siempre corresponden a defectos de masas bajo tierra, y las depresiones, a sus excesos. Las mediciones geodésicas corroboran esta tesis.

62. Inmersión en la arena movediza.

¿Será aplicable a los áridos el principio de Arquímedes? ¿A qué profundidad se hundirá en la arena seca una bola de madera colocada en su superficie? ¿Podría hundirse en la arena movediza una persona?

No se puede aplicar en forma directa el principio de Arquímedes a los áridos, puesto que las partículas que los forman, experimentan rozamiento que es ínfimo en los líquidos. No obstante, si la libertad de desplazamiento de las partículas de áridos no está limitada por su rozamiento recíproco, el referido principio se podrá aplicar. Por ejemplo, en semejante estado se encuentra la arena seca que se sacude reiteradamente; en este caso sus granos se desplazan sujetos a la fuerza de la gravedad.

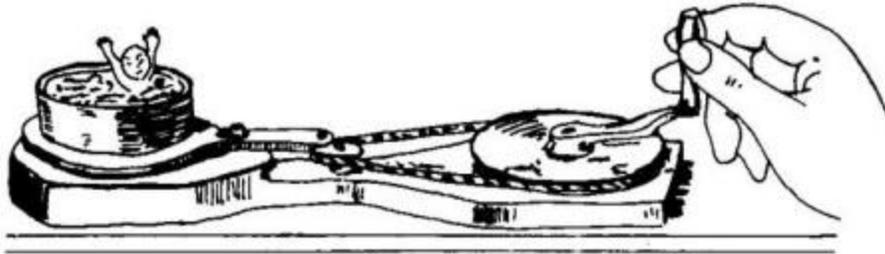


Dispositivo para sacudir la arena

Ya R. Hooke, famoso contemporáneo y compatriota de Isaac Newton, decía al respecto lo siguiente:

« Es imposible mantener bajo arena (que es sacudida ininterrumpidamente) un cuerpo ligero, por ejemplo, un trozo de corcho: éste `emergerá' enseguida a flor del árido, mientras que un cuerpo pesado, por el contrario, empezará a hundirse y al fin y al cabo alcanzará el fondo del recipiente.» Posteriormente, H. Bragg, eminente físico inglés, realizó estas experiencias valiéndose de una centrifugadora especial.

Se puede predecir el comportamiento de una bola dispuesta sobre la superficie de arena inmóvil recordando los razonamientos que en su tiempo permitieron a S. Stevin a deducir el principio de Arquímedes.



Esta figurilla ligera, con un peso sujetado a los pies, presa en la arena, se asoma al poner a funcionar la sacudidora

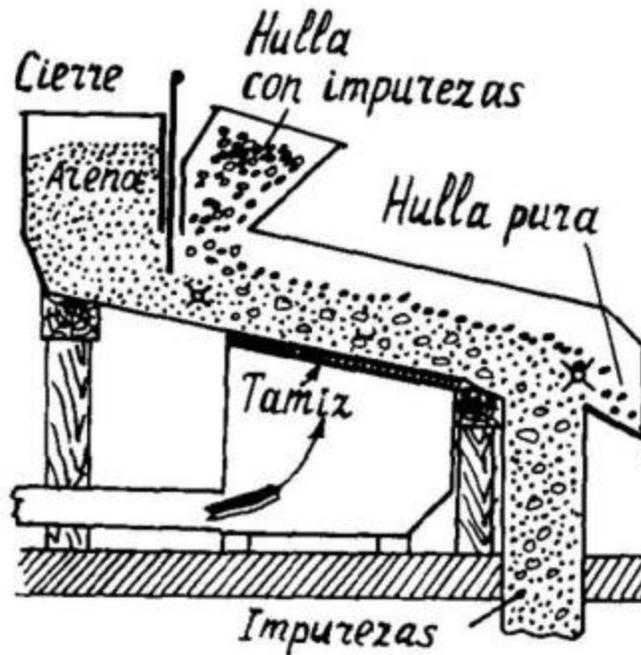
Primero advertamos que la llamada «densidad aparente» de la arena (o sea, la masa de un centímetro cúbico de este árido junto con los espacios de aire) es igual, en el caso de la arena de grano fino, a 1,7 g, es decir, supera tres veces la de la madera.

Separemos, aunque sea mentalmente, una bola de árido dentro de un montón de arena, de volumen geométrico igual al de la referida bola de madera. Esta última se mantiene en equilibrio merced a la acción de dos fuerzas diferentes: 1) el rozamiento de los granos de arena unos contra otros y 2) el peso de la capa de este árido dispuesta encima, que ejerce presión hacia los lados, empujando de esta manera nuestra bola de arena por abajo. La resultante de todas las fuerzas no debe ser menor que el peso de dicha bola. Si la sustituimos -también mentalmente- por otra más ligera, de madera, la presión que ésta sufrirá por abajo será mayor que su peso propio. Es evidente que bajo la acción de la fuerza de la gravedad nuestra bola imaginaria no podrá hundirse a tanta profundidad.

El nivel máximo al que se hundirá la bola en la arena no deberá ser mayor que la profundidad en que su peso equivalga al de la arena «contenida» en su parte hundida. Mas, esto no quiere decir en absoluto que llegará precisamente hasta ese nivel: sólo indicamos la profundidad límite de hundimiento en el árido bajo la acción de su peso. Esto tampoco quiere decir que la bola presa en el montón de arena por debajo del nivel límite, aparecerá por sí misma en la superficie: se lo impedirá el rozamiento.

Así pues, el principio de Arquímedes es aplicable a los materiales áridos, pero con rigurosas reservas que no tendrán validez cuando dichos cuerpos sufran sacudidas o vibración; en el caso que estamos analizando los áridos que sufren sacudidas, semejan líquidos. En lo que se refiere a los que están en reposo, el principio de Arquímedes tan sólo afirma que un sólido de peso específico considerable, situado en la superficie de un árido, puede hundirse por su propio peso a una profundidad no mayor a aquella en que su peso sería igual al de la cantidad correspondiente del árido que se contendría en la parte hundida del objeto en cuestión.

Por cierto, esto permite sacar la conclusión de que, como el peso específico medio del cuerpo humano es menor que el de la arena seca, una persona no puede ser tragada por la arena movediza. En semejante caso, mientras menos se mueva ella, menor será la profundidad a que se hundirá: la agitación sólo precipita el hundimiento.



La posibilidad de aplicar el principio de Arquímedes al caso de la arena se aprovecha en la técnica para separar las impurezas contenidas en la hulla. La hulla húmeda, que debe ser purificada, se echa sobre una capa de arena cuyo peso específico supera el de este combustible, pero es menor que el de la ganga a separar. Para agitar los granos de arena, se bombea aire a través de ella, de abajo arriba e ininterrumpidamente, que pasa por un tamiz sobre el cual está la arena. Su presión, es decir, la velocidad del flujo de aire, determina el peso específico del árido. Al tomar contacto con la superficie de arena, los fragmentos de hulla y las impurezas se separan: el carbón se acumula en la superficie, mientras que la ganga se hunde en la arena, pasa por el tamiz y se acumula en un recipiente. La figura muestra la estructura de semejante equipo.

63. El líquido adopta forma esférica.

¿Cómo se podría demostrar el hecho de que en estado de ingravidez los líquidos tienen forma esférica?

La propiedad del líquido en ingravidez de adoptar forma esférica se demuestra evidentemente en el famoso experimento de Plateau: una porción de aceite de oliva mezclada en una disolución hidroalcohólica, de la misma densidad, se agrupa en forma de bola. Pero es imposible averiguar si esta forma esférica es geoméricamente exacta o no. Por ello, el experimento de Plateau comprueba grosso modo la tesis que nos interesa. Este hecho se demuestra mediante el fenómeno del iris.

La teoría del arco iris afirma que una desviación, por muy insignificante que sea, de la forma de las gotas de lluvia respecto de la esférica geoméricamente estricta debe de reflejarse en la forma

del iris; si la diferencia es considerable, éste puede no aparecer en absoluto. Como una gota es imponderable mientras cae libremente (v. ej. 50), este hecho nos proporciona la demostración que necesitamos.

64. La gota de agua.

¿En qué caso las gotas de agua que caen del grifo de un samovar son más pesadas, cuando el agua está fría o caliente?

El peso de la gota depende de la magnitud de la tensión superficial del líquido: ella se desprende cuando su peso es suficiente para romper la película superficial en su «cuello».



Si el radio de éste es r , y el coeficiente de tensión superficial es σ (N/m), la gota se desprenderá con

$$2\sigma r = mg$$

por lo que su masa será

$$m = \frac{2\sigma r}{g}$$

Cuanto mayor es la tensión superficial, tanto mayor es el peso de la gota. Pero consta que al elevarse la temperatura, se reduce la tensión superficial: en el caso del agua disminuye en el 0,23 % por cada grado centígrado. A los 100 °C la tensión superficial del agua se reduce en el 23 % en comparación con la magnitud correspondiente a 0 °C, mientras que a los 20 °C es menor en un 4,6 % que a 0 °C. Por consiguiente, al bajar la temperatura del agua contenida en el samovar de 100 °C hasta la temperatura ambiente (20 °C), el peso de las gotas de agua deberá elevarse en

$$\frac{95.4 - 77}{77} = 0.24$$

o sea, en el 24 %, es decir, aumentará notablemente.

65. La elevación capilar.

a) ¿A qué altura debe subir el agua contenida en un tubo de vidrio de diámetro interior de 1 micra?

b) ¿Qué líquido se elevaría a la mayor altura en semejante tubo?

c) ¿Qué agua -saliente o fría- se eleva a la mayor altura por un tubo capilar?

a) Con arreglo a la ley de Borelli, también denominada muy a menudo «ley de Jurin», la altura a que se eleva el líquido que moja las paredes del tubo, es inversamente proporcional a su diámetro. En uno de vidrio de diámetro interior de 1 mm el nivel de agua se elevará a 15 mm. Por ello, en un tubo de diámetro interior de 1 micra su altura será 1000 veces mayor, o sea, ¡ de 15 metros !

b) Subiendo por el tubo capilar, el potasio fundido (funde a 63 °C) deja atrás a los demás líquidos: en un tubo de vidrio de diámetro interior de 1 mm subirá a 10 cm; si el diámetro del canal es de 1 micra, se elevará a 10 cm x 1000 = 100 m.

c) En un tubo del diámetro indicado el líquido subirá tanto más cuanto mayor sea su tensión superficial y menor sea su densidad. Esta dependencia se expresa por medio de la fórmula siguiente:

$$rgh = \frac{2\sigma}{r}$$

donde h es la altura de elevación, σ , el coeficiente de tensión superficial, r, el radio interior del tubo y ρ , la densidad del líquido. Con el aumento de la temperatura la tensión superficial disminuye mucho más rápido que la densidad ρ , a consecuencia de lo cual la altura h debe reducirse: un líquido caliente subirá por el tubo capilar a menor altura que otro frío.

66. En un tubo inclinado.

El agua sube por un tubo capilar inclinado a 10 cm sobre el nivel del agua contenida en un recipiente. ¿A qué altura se elevará este líquido si el tubo se inclina a 30° respecto a su superficie?

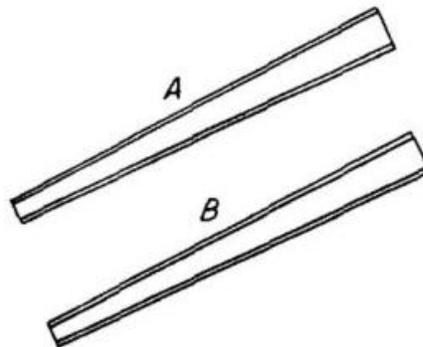


La altura a la que se eleva un líquido contenido en un tubo capilar no depende de la posición, sea inclinada o vertical, de este último. En todos los casos la elevación, es decir, la distancia del menisco a la superficie del líquido, medida sobre la vertical, será la misma. En el caso descrito el «hilo» de líquido que sube por el tubo inclinado a 30° será dos veces más largo que con la posición vertical de éste, pero la altura del menisco sobre el nivel del líquido contenido en el recipiente será la misma.

67. Las gotas en movimiento.

Tenemos dos tubos de vidrio delgados y abocinados por un extremo. En el primero, junto al punto A se encuentra una gota de mercurio, y en el segundo, junto al punto B, una de agua. Además, las gotas no están en reposo, sino que se mueven por sus respectivos tubos. ¿Por qué sucede esto?

¿En qué sentido se mueven las gotas, hacia el extremo ancho o hacia el estrecho?

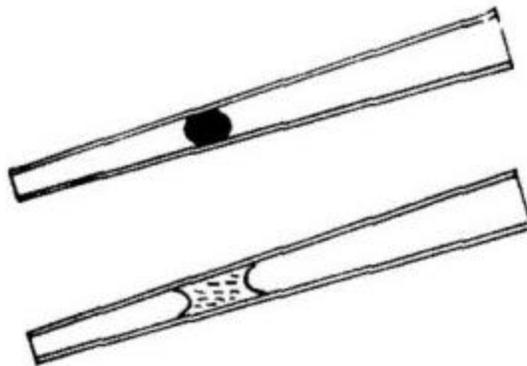


La columna de mercurio que se encuentra en el tubo de vidrio tiene convexos ambos extremos, puesto que este líquido no moja el cristal. La superficie que da al extremo derecho, tiene un radio

de curvatura menor que la opuesta; por eso ejerce mayor presión sobre el mercurio (problema 65), empujándolo hacia el extremo abocinado.

La columna de agua, que moja el cristal, está acotada por meniscos cóncavos por ambos lados, además, el de la parte estrecha es menos cóncavo que el otro. El menisco curvo arrastra el líquido con mayor fuerza, por eso la columna de agua se desplaza hacia la parte angosta del tubo.

Así, pues, cada una de las columnas de líquido se desplaza por su respectivo tubo en sentidos opuestos: la de mercurio, hacia el extremo ancho, y la de agua, hacia el estrecho.



La columna de mercurio (arriba) se desplaza hacia el extremo abocinado del tubo, mientras que la del agua (abajo) se corre hacia el estrecho. Esta última propiedad del agua permite disminuir el perjuicio que causan las sequías

La capacidad del agua de pasar -por sí misma- por los canales capilares de tubos anchos a estrechos tiene mucha importancia para la conservación de la humedad en el suelo. «Si la capa superior del suelo está compacta, es decir, tiene canalitos estrechos, mientras que las inferiores están porosas, o sea, tienen muchísimos canalitos más anchos, entonces -afirma el agrónomo A. Dudinski- el agua pasa fácilmente de la capa inferior a la superior. Pero si, por el contrario, la capa inferior está compacta, en tanto que la superior está porosa, esta última, al secarse, ya no podrá absorber agua procedente de la capa inferior (puesto que el agua no pasa de canalitos estrechos a anchos, sino que sólo lo hace a la inversa) y, por tanto, seguirá siendo seca.»

En esto consiste uno de los métodos utilizados para atenuar la acción perjudicial de las sequías, consistente en el esponjamiento del suelo:

«para conservar humedad en el suelo, hay que esponjar, con la mayor frecuencia posible, su capa superior, hasta unos dos centímetros de profundidad e incluso menos; en este caso los canalitos estrechos formados en ella se destruyen y sustituyen por otros, más anchos, que no pueden succionar agua de la capa subyacente. La capa superior porosa se vuelve seca, pero ya no puede absorber agua de los canalitos más estrechos de la capa inferior del suelo ni la puede conducir hasta la superficie, protegiendo de esa manera el resto del suelo contra la desecación por la acción del viento y los rayos solares.»

Éste es uno de los ejemplos aleccionadores de la importancia que tiene este fenómeno físico que a primera vista parece ser tan insignificante.

68. Una lámina colocada en el fondo de un recipiente con líquido.

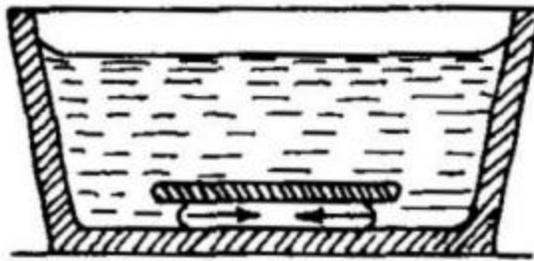
Si en el fondo de un recipiente de vidrio lleno de agua se coloca una lámina de madera bien adherida al mismo, ésta emergerá inminentemente. Pero si al fondo del mismo recipiente con

mercurio se aplica una lámina de vidrio, ésta se quedará en su lugar. Consta que la flotabilidad del vidrio en el mercurio (la diferencia de densidades del mercurio y el vidrio) es mucho mayor que la de la madera en el agua.

¿Por qué, pues, la lámina de madera sube a la superficie, mientras que la de vidrio en el mercurio no sube?

La lámina de madera, depositada en el fondo del recipiente con agua, tendrá que emerger, pues el líquido penetra por debajo de ella. Sólo nos queda explicar, por qué el agua se cuele por debajo de la lámina de madera, mientras que el mercurio no penetra por debajo de la de vidrio.

Hay que tener en cuenta que por más que se adhiera la lámina al fondo, entre ellos siempre habrá un espacio muy pequeño. Junto a los bordes de estas dos superficies muy próximas una a otra, el agua, que moja tanto la madera como el vidrio, forma una concavidad que da hacia el espacio libre de agua; dicha concavidad, lo mismo que el menisco cóncavo, arrastra agua al espacio entre la lámina y el fondo.



El agua se cuele por debajo de la lámina aplicada al fondo del recipiente

Es distinto el caso del mercurio y la lámina de vidrio. Este líquido no moja al vidrio, por eso entre la lámina y el fondo, -ambos de vidrio, la superficie convexa del mercurio da al espacio de aire; esta convexidad presiona hacia afuera y no deja que el metal líquido se cuele por debajo de la lámina.



El mercurio no penetra por debajo de la lámina aplicada al fondo

69. Ausencia de tensión superficial.

¿A qué temperatura se anula la tensión superficial de los líquidos?

La tensión superficial del líquido desaparece del todo a la temperatura crítica: éste pierde su capacidad de formar gotas y se evapora a cualquier presión.

70. La tensión superficial

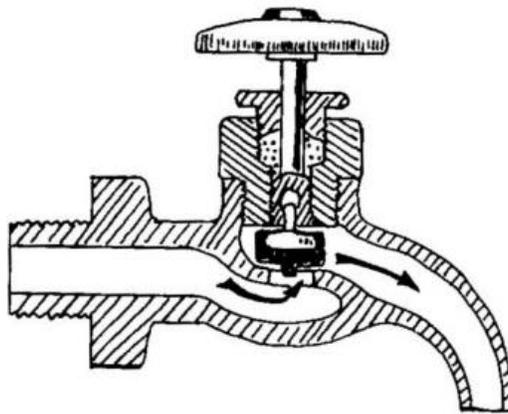
¿Qué presión ejerce, aproximadamente, la capa superficial de un líquido sobre las capas subyacentes?

A pesar de la finura extraordinaria³ -de unos 5×10^{-8} cm-, la película superficial de líquido ejerce enorme presión sobre la masa de líquido que ella envuelve. Para algunos líquidos esta presión es de decenas de miles de atmósferas, es decir, equivale a decenas de toneladas por centímetro cuadrado.

Semejante presión condiciona la baja compresibilidad de los líquidos que, de por sí, siempre están comprimidos con gran fuerza, por lo cual se obtiene un efecto ínfimo cuando se aumenta artificialmente en cien atmósferas una presión de decenas de miles de atmósferas existente en ellos.

71. El grifo.

¿Por qué los grifos de agua corriente suelen ser giratorios, y no en forma de esclusa?



Parecería que los grifos de compuerta instalados en las cañerías de agua serían más manejables que las llaves de rosca que se emplean generalmente. Sin embargo, no se utilizan porque causarían averías de la red de aguas corrientes. Al cerrar bruscamente el grifo, es decir, al cortar repentinamente la corriente, se provocaría una fuerte sacudida de toda la red de tuberías, el llamado golpe hidráulico, o golpe de ariete, muy peligroso para este tipo de obras. El Prof. A. Deisha, autor de un libro de texto de hidráulica, compara el golpe de ariete con el choque de un tren empujado por la locomotora, contra un tope terminal:

«En este caso los topes del primer vagón que chocan con el terminal, se comprimirán por la fuerza de inercia de los vagones siguientes, hasta que todos se detengan. Acto seguido los resortes amortiguadores del delantero tenderán a extenderse empujando los demás vagones hacia atrás. La onda creada por los topes comprimidos recorrerá todo el tren, del primer vagón hasta el último. Si al final del tren está enganchada una locomotora pesada, la onda de presión reflejada por ella recorrerá todo el tren en sentido inverso, hasta el tope terminal. De modo que las oscilaciones, amortiguándose gradualmente a causa de la resistencia, se transmitirán de un extremo a otro del tren, y a la inversa. La primera onda de presión será peligrosa para los muelles de topes de todos los vagones, y no sólo del delantero.

³ La película superficial de líquido consta sólo de una capa de moléculas.

Como el agua es elástica, aunque en grado ínfimo, cuando se cierra el grifo instalado en el extremo de una tubería larga, las partículas traseras empiezan a empujar las delanteras (que ya se han detenido), creando de esa manera una presión elevada; ésta, lo mismo que una ola ordinaria, viajará a gran velocidad (un poco menor que la de propagación del sonido en el agua) por toda la tubería de cabo a rabo. Al alcanzar el otro extremo (el tanque de presión, por ejemplo), la onda se reflejará hacia el grifo; de tal modo se producirá una serie de oscilaciones, esto son, elevaciones de presión que irán amortiguándose paulatinamente debido a la resistencia a la onda. No obstante, la primera de ellas será muy peligrosa no sólo en el extremo donde está instalado el grifo, sino también en el extremo opuesto de la conducción, próximo al tanque, puesto que podrá destruir fácilmente cualquier pieza o junta de menor resistencia. La presión de ariete que se crea en este caso, sobre todo la reflejada, podrá superar de 60 a 100 veces la presión hidrostática normal existente en la tubería.»

El golpe será tanto más fuerte y más destructor cuanto más larga sea la tubería; estropea el sistema de abastecimiento de agua, a veces hace reventar tuberías de hierro colado, ensancha las de plomo, arranca codos, etc. Para evitar este efecto perjudicial, hay que estrangular gradualmente la corriente de agua, es decir, cortarla con lentitud utilizando para ello válvulas de rosca. Cuanto más larga es la tubería, tanto más deberá durar el cierre.

La fuerza del golpe de ariete es directamente proporcional a la longitud del conducto y al tiempo durante el cual se cierra la llave: cuanto menos dura el cierre, tanto más fuerte será el golpe. Se ha deducido la siguiente fórmula para calcular su intensidad: la presión del golpe equivale (en metros) a la altura de la columna de agua

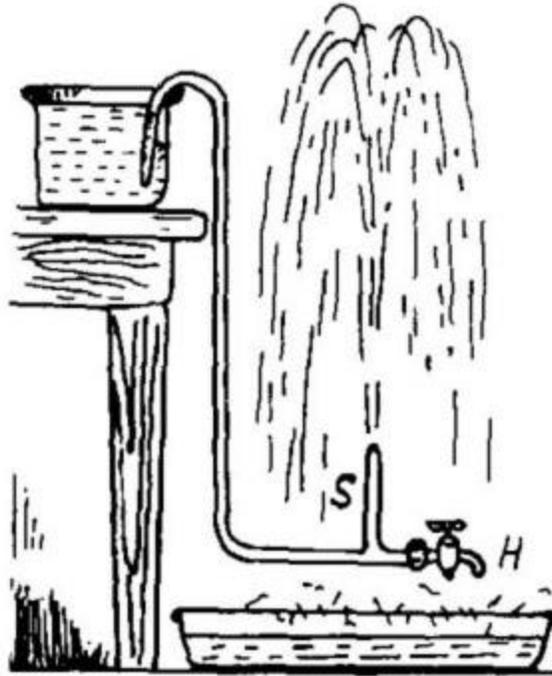
$$h = 0.15 \frac{vl}{t} \text{ (m)}$$

longitud del conducto (en metros) y t , el tiempo durante el cual se cierra la llave (en segundos). Por ejemplo, si una tubería de 1000 m de longitud, por la cual el agua circula con una velocidad de 1 m/s, se cierra en 1 s, la presión creada en ella aumentará por el efecto del golpe de ariete hasta

$$h = 0.15 \frac{1 \cdot 1000}{1} = 150 \text{ m}$$

o sea, hasta 15 at.

El fenómeno de golpe de ariete se puede observar realizando un experimento mediante el dispositivo mostrado en la figura.



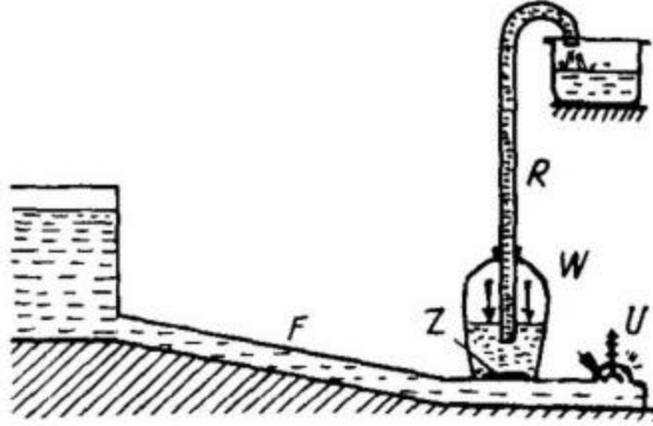
Experimento que ilustra el golpe hidráulico.

El agua contenida en un recipiente, sale de éste por un tubo de sifón, hecho de vidrio, corriendo verticalmente hacia abajo y luego horizontalmente. En el otro extremo del conducto está instalado un grifo de compuerta H, y a cierta distancia del extremo, un tubo corto S con un orificio pequeño que da hacia arriba.

Mientras el grifo permanece cerrado, el agua brota del conducto corto sin superar el nivel de líquido contenido en el recipiente. Mas, si la llave se abre y acto seguido se cierra bruscamente, en un primer instante el agua brotará por encima de la altura del nivel de líquido del recipiente, probando evidentemente que la presión creada en el tubo supera la hidrostática.

No se debe creer que en este caso se viola la ley de conservación de la energía: aquí, menor cantidad de agua se eleva a mayor altura merced al descenso de ésta desde cierto nivel, lo mismo que una carga ligera, suspendida en el extremo de una palanca, se eleva a mayor altura que otra, más pesada, colocada en el extremo opuesto.

El principio del golpe de ariete se aprovecha en una máquina simple para elevar agua, llamada ariete hidráulico, que sólo consume su energía viva.



Esquema de funcionamiento del ariete hidráulico

Para ponerla en funcionamiento hay que cerrar la válvula U, debido a lo cual en el conducto F se produce un golpe hidráulico; la presión elevada del líquido abre la válvula Z y el aire, comprimido momentáneamente en W, lo impele hacia arriba. El golpe cesa, la válvula Z se cierra, la U se abre y el agua que vuelve a circular por F, cierra la válvula U y de nuevo provoca un golpe de ariete, y todo se vuelve a repetir.

72. La velocidad de salida.

¿Qué líquido, el agua o el mercurio, tendrá la mayor velocidad de salida si son iguales sus niveles en los embudos que los contienen?

El mercurio pesa mucho más que el agua; por tanto, es probable que el primero salga más rápido que la segunda. Sin embargo, ya E. Torricelli sabía que esto no es así: la velocidad de salida no depende de ninguna manera de la densidad del líquido y se determina utilizando la fórmula de Torricelli:

$$v = \sqrt{2gh}$$

donde v es la velocidad de salida del líquido, g , la aceleración de la gravedad y h , la altura del nivel de líquido contenido en el recipiente. Según vemos, en la fórmula no interviene la densidad del líquido.

Este principio paradójico de salida del líquido se comprende fácilmente si se considera que la fuerza que impele el líquido, es creada por la parte de éste, situada a un nivel más alto que el orificio de salida. Si el líquido es pesado, esta fuerza es mayor que en el caso del líquido ligero; pero la masa que se pone en movimiento en el primer caso es mayor, por cierto, en la misma proporción. No es de extrañar, pues, que la aceleración y, por consiguiente, la velocidad, son idénticas en ambos casos.

73. El problema de la bañera.

a) *Una bañera de paredes verticales se llena con agua de grifo en 8 min, y se vacía por medio del orificio de desagüe (el grifo está cerrado) en 12 min. ¿Cuánto tiempo deberá permanecer abierto el grifo para llenar completamente la pila vacía mientras está abierto el desagüe?*



- b) La pila se llena en 8 min; con el grifo cerrado se tarda el r mismo lapso en vaciarla mediante el orificio de salida. ¿Qué cantidad de agua habrá en ella si durante las veinticuatro horas se vierte agua de grifo mientras el desagüe está abierto?*
- c) Resuélvase este mismo problema si el tiempo de llenado es 8 min, y el de vaciado, 6 min.*
- d) Resuélvase idéntico problema, pero llenándose a los 30 min y vaciándose en 5 min.*
- e) La pila se vacía en un lapso más corto que el de llenado mediante el grifo. ¿Habrá agua en la bañera si empezamos a echar agua dejándola salir al mismo tiempo?*

A continuación ofrecemos sendos pares de respuestas a las cinco preguntas planteadas; en una columna se ofrecen las respuestas correctas y en la otra, incorrectas.

- | | |
|---|---|
| a) La bañera se llenará hasta los bordes en 24 min. | a) La bañera nunca se llenará hasta los bordes. |
| b) La bañera estará vacía. | b) El agua llegará hasta 1/4 de la altura de la pila. |
| c) No habrá agua en la pila. | c) El agua subirá hasta las 9/64 de la altura de la pila. |
| d) No habrá agua en la pila. | d) El agua subirá hasta 1/144 de la altura de la bañera. |
| e) La pila estará vacía. | e) En la bañera habrá un poco de agua. |

¿En qué columna, pues, están las respuestas correctas?

Las de la columna izquierda parecen ser verosímiles. Pero, en realidad, lo son las de la derecha. Por cierto, a primera vista estas respuestas parecen ser muy extrañas; no obstante, vamos a analizar por separado cada uno de estos problemas.

a) En la bañera se vierte más agua que la que sale, sin embargo, en la columna derecha se afirma que nunca se llenará. ¿Por qué? Es que surge la idea de que es muy fácil calcular dentro de cuántos minutos el agua empezará a desbordarse. Cada minuto se llena 1/8 parte del volumen de la pila, mientras que sale 1/12; por consiguiente, el aforo por minuto es

$$1/8 - 1/12 = 1/24$$

parte de su capacidad. Está claro que en 24 minutos se llenará.

b) En el segundo problema el tiempo de llenado equivale al de vaciado. Por lo tanto, la cantidad de agua que ingresa cada minuto es igual a la que sale. Esto quiere decir que en la pila no deberá quedar ni una sola gota de agua, por más que dure el proceso. Sin embargo, en la columna de respuestas correctas se afirma que el nivel de agua llegará hasta un cuarto de la altura de la bañera.

c), d) y e). Es obvio que en los tres casos sale mayor cantidad de agua que entra, mas, en la segunda columna se asevera que no obstante ello en la pila se acumulará cierta cantidad de líquido.

En suma, las respuestas que damos por correctas, parecen ser absurdas. Para cerciorarse de que realmente son correctas, el lector tendrá que seguir una cadena bastante larga de razonamientos. Empecemos por el primer problema.

a) Éste viene a ser una versión del famoso problema del depósito, que se remonta a Herón de Alejandría. Surgido hace más de dos milenios, el problema sigue figurando en muchos libros de problemas de matemáticas escolares, sin que por ello deje de ser errónea, desde el punto de vista de la física, su solución tradicional. Esta última se basa en la suposición equivocada de que el agua sale del recipiente en chorro uniforme mientras su nivel desciende.

Dicha suposición contradice la ley física que afirma que la velocidad de salida del líquido disminuye mientras desciende su nivel. Por consiguiente, es erróneo creer, como suelen hacer los escolares en las clases de matemáticas, que si la pila se vacía en 12 min, cada minuto sale una dozava parte de su contenido inicial. En realidad, el líquido sale de la manera siguiente:

inicialmente, mientras su nivel es bastante alto, cada minuto sale más de una dozava parte de la pila llena; esta cantidad va disminuyendo progresivamente por instantes, y cuando su nivel es muy bajo, cada minuto sale menos de una dozava parte del contenido inicial. Por esta razón, el volumen de agua que sale durante este lapso equivale, sólo por término medio, a una dozava parte del de la pila llena, mientras que de hecho el gasto no será exactamente igual a una dozava parte, sino que un poco mayor o menor.

En general, el vaciado de la bañera se asemeja mucho a la marcha del reloj de bolsillo descrita por Mark Twain en tono de broma: el reloj marchaba bien «por término medio», al dar el número correspondiente de vueltas durante las veinticuatro horas. Mas, en la primera mitad de este tiempo adelantaba demasiado retrasándose extremadamente durante el resto de la jornada.

Resolver el problema de la pila partiendo de la velocidad media de salida del agua sería lo mismo que consultar el reloj descrito por el famoso escritor estadounidense.

Según vemos, la versión simplificada de este problema, que se resuelve tan fácilmente en la escuela, hay que sustituirla por la variante real ajustándola a las leyes de la naturaleza. Obrando de esa manera obtendremos un resultado distinto. Al comenzar a llenar la bañera mientras el nivel de agua no es alto, sale menos de una dozava parte de su capacidad total; en cambio, cuando el nivel es alto, sale más de una dozava parte. Por ello, el gasto puede ser una octava parte de su volumen, y podrá igualarse con la cantidad de agua que ingresa, antes de que se llene toda la pila. A partir de este instante el nivel dejará de ascender, puesto que el agua afluyente saldrá por el desagüe. El nivel se mantendrá constante por debajo de los bordes de la bañera. Claro está que en semejantes condiciones nunca se llenará completamente. Según veremos más adelante, el cálculo matemático confirma lo que acabamos de deducir.

b) En este apartado la corrección de nuestra solución es mucho más evidente. El tiempo de llenado y de vaciado es uno mismo, 8 min. Mientras el nivel es bajo, o sea, cuando se empieza a

añadir agua, cada minuto se llena una octava parte de la capacidad de la pila, y sale, según explicamos más arriba, menos de una octava parte. En resumidas cuentas, el nivel deberá elevarse hasta que el caudal afluyente se iguale con el gasto. Por consiguiente, en la pila siempre habrá agua. Se puede demostrar -muy pronto lo haremos que siendo iguales el tiempo de llenado y de vaciado, la altura del nivel real deberá equivaler a un cuarto del de la pila llena.

c), d) y e) Después de lo que acabamos de exponer no se requieren muchas aclaraciones para desvanecer las dudas en torno a nuestras respuestas a las tres preguntas restantes. En ellas, el tiempo de vaciado es menor que el de llenado. Es imposible llenar completamente la pila ateniéndose a estas condiciones, mas, se puede asegurar cierta capa de agua, aunque el flujo entrante sea exiguo.

Hay que recordar que las primeras porciones de agua que se añaden, no podrán salir con la misma rapidez, pues mientras el nivel es bajo, la velocidad de salida será muy pequeña; al descender el nivel de líquido, esta magnitud se vuelve cada vez menor que cualquier velocidad constante de llenado. Por ende, en la bañera deberá haber una capa de agua, aunque sea muy pequeña. En otras palabras, contrariamente al «sentido común», en todo tonel -por más rajado que esté- siempre habrá un poco de agua a condición de que se agregue uniforme e ininterrumpidamente la cantidad de agua correspondiente.

Ahora pasemos al examen matemático de los mismos problemas. Nos daremos cuenta de que los ejercicios elementales que se ofrecen a los escolares desde hace dos milenios, requieren conocimientos y hábitos que rebasan el marco de la aritmética elemental.

Para un recipiente de forma cilíndrica (en general, para uno de paredes verticales) vamos a establecer cierta dependencia entre el tiempo T de llenado, ídem t de vaciado y la altura l del nivel constante de líquido si el llenado se efectúa con el orificio de desagüe destapado. Para ello convengamos en utilizar las designaciones siguientes:

H , la altura del nivel de líquido en el recipiente lleno;

T , el tiempo de llenado hasta el nivel H ;

t , ídem de vaciado del recipiente a partir del nivel inicial H ;

S , la sección del recipiente;

c , ídem del desagüe;

w , la velocidad de descenso del nivel en el recipiente por segundo;

v , ídem de salida del líquido por segundo;

l , la altura del nivel constante mientras el orificio de vaciado está destapado. Está claro que si en un segundo el nivel desciende en w , en el mismo lapso por el desagüe deberá salir una cantidad Sw de líquido, equivalente al volumen de la columna cv del chorro que sale:

$$Sw = cv,$$

de donde

$$w = v \cdot c / S$$

No obstante, la velocidad v de salida del líquido se determina por la fórmula de Torricelli citada más arriba, $v = \sqrt{2gh}$, donde l es la altura del nivel l y g , la aceleración de la gravedad. Por otro lado, la velocidad w de ascenso del nivel de líquido cuando el orificio está tapado, es H/T . El

nivel será constante cuando la velocidad de su descenso sea igual a la de ascenso, es decir, si tiene lugar la igualdad siguiente:

$$\frac{H}{T} = \frac{c}{S} \sqrt{2gl}$$

Haciendo uso de esta fórmula hallamos la altura l del nivel estabilizado

$$l = \frac{H^2 S^2}{2gT^2 c^2} \quad [1]$$

Ésta es la altura del nivel de líquido contenido en el recipiente durante el ingreso de agua mientras el desagüe está destapado.

Simplificamos esta fórmula eliminando las variables S , c y g . El descenso del nivel de líquido en el recipiente de paredes verticales (mientras el grifo permanece cerrado) es un movimiento uniformemente variable que comienza con la velocidad w y termina con la velocidad nula. La aceleración a de semejante movimiento se determina a partir de la ecuación siguiente:

$$w^2 = 2aH$$

de donde:

$$a = \frac{w^2}{2H}$$

Si ponemos el valor de w de la expresión $w = cv/S$ y tenemos en cuenta que $v = \sqrt{2gh}$ obtenemos el resultado siguiente:

$$a = \frac{c^2 v^2}{2S^2 H} = \frac{c^2 * 2gH}{2S^2 H} = g \frac{c^2}{S^2}$$

Además, para el caso del movimiento que estamos analizando

$$H = \frac{at^2}{2} = \frac{gc^2 t^2}{2S^2}$$

de donde

$$t = \frac{2HS^2}{gc^2}$$

Realizando la sustitución en la fórmula [1], obtendremos el resultado siguiente:

$$l = \frac{H^2 S^2}{2gT^2 c^2} = \frac{H * HS^2}{2T^2 gc^2} = \frac{Ht^2}{4T^2}, \frac{l}{H} = \frac{t^2}{4T^2}$$

Así pues, para las condiciones enunciadas, el nivel de líquido contenido en el recipiente deberá mantenerse a una altura equivalente a la del recipiente lleno y se determinará mediante la fórmula que sigue:

$$\frac{l}{H} = \frac{t^2}{4T^2}$$

Ahora vamos a utilizar la fórmula deducida para resolver nuestros problemas.

a) La duración de llenado es $T = 8$ min y el tiempo de vaciado $t = 12$ min. La altura l del nivel límite referida a la del recipiente H , equivale a

$$\frac{l}{H} = \frac{12^2}{4 * 8^2} = \frac{9}{16} \text{ partes}$$

El nivel de agua sólo alcanzará $9/16$ partes de la altura de la bañera. Por más que se añada agua, su nivel no se elevará después.

b) En este caso $T = t = 8$ min:

$$\frac{l}{H} = \frac{t^2}{4T^2} = \frac{1}{4}$$

El nivel ascenderá a un cuarto de la altura del recipiente.

c) Para $T = 8$ min y $t = 6$ min:

$$\frac{l}{H} = \frac{6^2}{4 * 8^2} = \frac{9}{64}$$

El agua alcanzará $9/64$ partes de la altura de la pila.

d) $T = 30$ min y $t = 5$ min:

$$\frac{l}{H} = \frac{5^2}{4 * 30^2} = \frac{1}{144}$$

El nivel de líquido equivaldrá a $1/144$ parte de la altura de la bañera.

e) $t < T$:

$$\frac{l}{H} = \frac{t^2}{4T^2}$$

La expresión obtenida podrá ser igual a cero siempre que se observen las dos condiciones que siguen:

1) $t = 0$ y $T \neq 0$. Esto quiere decir que la bañera se vacía instantáneamente, lo cual es imposible.

2) $t \neq 0$ y $T = \infty$. Es decir, con el desagüe tapado el tiempo de llenado será indefinido. En otras palabras, la afluencia de agua por segundo es nula, no ingresa líquido en la bañera. En la práctica este caso equivale a que la llave esté cerrada.

Así pues, siempre que el grifo esté abierto y la pila no se vacíe instantáneamente, l nunca podrá ser nula: la capa de agua siempre tendrá altura finita.

¿Bajo qué condiciones, pues, sería posible llenar toda la pila con el orificio abierto?

Evidentemente, cuando $l = H$, es decir, cuando

$$\frac{t^2}{4T^2} = 1 \Rightarrow t^2 = 4T^2 \Rightarrow t = 2T$$

Por tanto, si el tiempo de llenado es dos veces menor que el de vaciado, será posible llenarla por completo, aunque el orificio esté abierto.



También sería interesante calcular cuánto tiempo se necesitará para alcanzar un nivel constante. Este problema no se resuelve por medio de las matemáticas elementales; habrá que valerse del cálculo integral. Ofrecemos el cálculo correspondiente a los que se interesan por esta variante; aquellos lectores que tienen conocimientos de matemáticas superiores podrán omitir el análisis que se expone a continuación, y sólo emplear la fórmula deducida al final del cálculo.

La velocidad de elevación del nivel de líquido en un recipiente al que se añade agua mientras el orificio de desagüe está destapado, se define como la diferencia entre la velocidad de ascenso del

nivel con el orificio tapado (H/T) y la de descenso del mismo sin agregar líquido, ($\frac{c}{g} \sqrt{2gx}$,

donde x es la altura del nivel de agua en un instante dado). Por consiguiente, la velocidad de ascenso del nivel en el momento dado será

$$\frac{dx}{dt} = \frac{H}{T} - \frac{c}{S} \sqrt{2gx}$$

de donde

$$dt = \frac{dx}{\frac{H}{T} - \frac{c}{S} \sqrt{2gx}}$$

El tiempo necesario para que el nivel de líquido suba hasta la altura $x = h$ se designa por Θ . Integrando la ecuación

$$\int_0^{\Theta} dt = \int_0^h \frac{dx}{\frac{H}{T} - \frac{c}{S} \sqrt{2gx}}$$

obtenemos la siguiente fórmula para determinar el tiempo Θ que se necesita para que el nivel de líquido alcance la altura h :

$$\Theta = -\frac{S}{gc} \left[\sqrt{2gh} + \frac{HS}{Tc} \ln \left(1 - \frac{cT}{SH} \sqrt{2gh} \right) \right]$$

(aquí, \ln denota el logaritmo de base $e = 2,718\dots$).

Esta expresión puede ser simplificada. Partiendo de las igualdades $wS = vc$ y $v = \sqrt{2gh}$, se determina la velocidad w de descenso del nivel desde la altura h al vaciar la pila:

$$w = \frac{dh}{dt} = \frac{c}{S} v = \frac{c}{S} \sqrt{2gh}$$

Por consiguiente,

$$dt = \frac{S}{c\sqrt{2gh}} \frac{dh}{\sqrt{h}} \Rightarrow \int_0^t dt = \frac{S}{c\sqrt{2gh}} * \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

de donde

$$t = \frac{2S}{c} \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

Después de realizar las sustituciones correspondientes se obtiene la siguiente expresión para determinar Θ :

$$\Theta = -\left[t\sqrt{\frac{h}{H}} + \frac{t^2}{2T} \ln \left(1 - \frac{2T}{t} \sqrt{\frac{h}{H}} \right) \right]$$

la cual no contempla los casos de sección S y c del recipiente y del orificio de salida ni la aceleración de la gravedad g. Esto último señala que el tiempo de llenado de la bañera debe ser el mismo que en cualquier otro planeta.



Si deseamos averiguar cuánto tiempo se necesitará para alcanzar los niveles límites en los recipientes, llegaremos a la conclusión de que esta magnitud será indefinida, o sea, nunca se llenarán. Esta respuesta es bastante inesperada: se podría preverla, pues a medida que el nivel se aproxima a la altura límite, disminuye progresivamente su velocidad de elevación; cuanto más cerca esté el nivel de líquido a su límite, tanto menos tenderá a él. Queda claro que el agua nunca lo alcanzará, por mucho que se le acerque.

No obstante, desde el punto de vista práctico, es posible formular el problema de un modo distinto. Pues, en este caso no es obligatorio que el nivel de agua coincida exactamente con el límite; por ejemplo, pueden diferir en 0,01 de altura. El tiempo que se necesita para que el agua alcance este nivel «aproximado» se determina mediante la fórmula deducida poniendo $h = 0,991$, donde l es la altura del nivel límite; de modo que resulta que

$$\Theta = -\frac{t^2}{2T}(0,995 - \ln 0,005) = 2,15 \frac{t^2}{T}$$

Apliquemos la fórmula

$$\Theta = 2,15 \frac{t^2}{T}$$

a los casos que examinamos con anterioridad.

a) $T = 8$ min y $t = 12$ min:

$$\Theta = 2,15 \frac{12^2}{8} = 38,7 \text{ min}$$

El nivel constante se alcanzará en unos 39 min.

b) $T = t = 8$ min:

$$\Theta = 2,15 \frac{8^2}{8} = 17,2 \text{ min}$$

El líquido alcanzará el nivel constante en unos 17 min

c) $T = 8$ min y $t = 6$ min:

$$\Theta = 2,15 \frac{6^2}{8} = 9,7 \text{ min}$$

El nivel de líquido será constante dentro de unos 10 min.

d) $T = 30$ min y $t = 5$ min:

$$\Theta = 2,15 \frac{5^2}{30} = 1.8 \text{ min}$$

De hecho, el líquido alcanzará el nivel límite en menos de dos minutos.

e) Finalmente, la pila con el desagüe abierto se llenará totalmente, lo que ocurre -según determináramos anteriormente- a condición de que $t = 2T$, en un tiempo

$$\Theta = 2,15 \frac{2t^2}{2t} = 4.3t = 8.6T$$

Con esto damos por terminado el análisis de los problemas de la bañera, que se nos ha hecho tan largo. Es que el asunto es mucho más complicado de lo que se imaginan aquellos autores de libros de problemas de matemáticas que a la ligera incluyen en sus obras «problemas de los depósitos», destinados a los alumnos de la escuela primaria.

74. Vórtices en el agua.

Al vaciar la bañera, nos damos cuenta de que junto a su orificio de desagüe se forma un remolino.

¿En qué sentido gira éste, en el de las agujas del reloj o en sentido contrario? ¿Por qué?

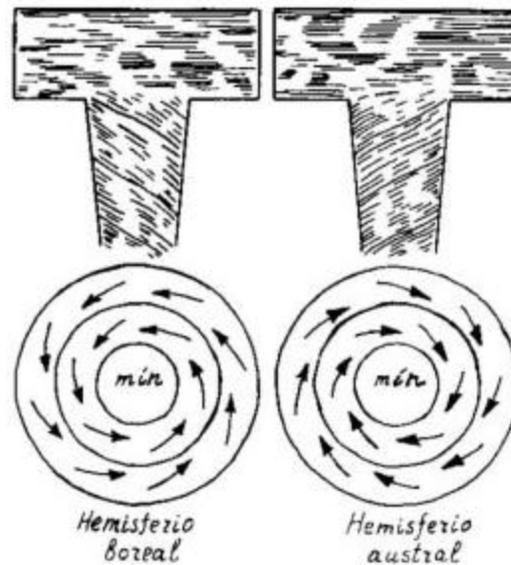
El problema planteado atrajo en su tiempo la atención de D. Grave, famoso matemático ruso, que señaló lo siguiente.

«Si un recipiente se vacía mediante un orificio abierto en su fondo, encima de él se forma un torbellino de líquido que gira, en el hemisferio boreal, en sentido contrario a las agujas del reloj, y en el austral, en sentido inverso. Cada lector puede comprobar la validez de esta observación dejando salir agua de la bañera. Para que la rotación del vórtice sea más evidente, se puede echar al agua trocitos de papel. Esta experiencia evidente comprueba la rotación de la Tierra, aunque se realiza por medios caseros.»⁴

A continuación este autor manifiesta lo siguiente: «Lo dicho permite sacar conclusiones muy importantes relativas a las turbinas hidráulicas. Si una turbina hidráulica horizontal gira en sentido antihorario, la rotación del Globo contribuirá a su funcionamiento; y a la inversa: si gira en sentido horario, el giro del Globo frenará la rotación del artefacto.» «Por ello -concluye el académico-, al fabricar nuevas turbinas hay que inclinar sus paletas de modo que giren en el sentido deseado.»

Estos razonamientos aparecen muy verosímiles. Todo el mundo sabe que la rotación de la Tierra condiciona la forma vorticial de los ciclones, un desgaste mayor del carril derecho de las vías férreas, etc. A lo mejor, se podría esperar que la rotación del planeta influiría de alguna manera en los embudos de agua que surgen en los recipientes durante el vaciado, o en las turbinas hidráulicas.

⁴ Este mismo criterio se expone en *Pequeño Larousse de ciencias y técnicas*, artículo Vórtice.- Nota del T.



Esquema del movimiento vorticial: arriba, al salir el líquido por el desagüe de la bañera; abajo, del aire en un ciclón.

No obstante, no debemos dejarnos cautivar por esta primera impresión. El comportamiento del embudo de agua que se forma encima del orificio de vaciado se comprueba fácilmente y, de hecho, no se ajusta a la descripción que acabamos de citar: en unos casos el remolino se enrosca en sentido antihorario, y en otros, en sentido opuesto. La dirección de giro, lejos de ser constante, no revela ninguna tendencia predominante, máxime si las observaciones se llevan a cabo en diferentes recipientes, y no en uno mismo.

El cálculo nos proporciona un resultado que concuerda muy bien con las observaciones: la magnitud de la llamada aceleración de Coriolis es muy pequeña y se calcula según la fórmula siguiente:

$$a = 2\omega * v \text{ sen } \varphi$$

donde a es la aceleración de Coriolis, v , la velocidad del cuerpo en movimiento, ω , la velocidad angular de rotación de la Tierra y φ , la latitud del lugar. Por ejemplo, en la latitud de San Petersburgo, siendo la velocidad del chorro de agua de 1 m/s se obtienen los datos siguientes: $v = 1 \text{ m/s}$, $\omega = 2/86.400 \text{ s}$; $\text{sen } \varphi = \text{sen } 60^\circ = 0.87$

$$a = \frac{2 * 2\pi * 0.87}{86.400} \approx 0.0001 \text{ m/s}^2$$

Como la aceleración de la gravedad es de 9,8 m/s, la de Coriolis vale una cienmilésima de ésta. En otras palabras, el esfuerzo que surge es igual a una cienmilésima parte del peso del agua que forma el torbellino. Está claro que cualquier irregularidad en la forma del recipiente, por ejemplo, su asimetría respecto del orificio de vaciado, deberá influir mucho más en el sentido de rotación del chorro de agua que el giro del planeta. El hecho de que al observar el vaciado de un mismo

recipiente a veces se suele colegir que el sentido de rotación del vórtice siempre es uno mismo, no comprueba, ni mucho menos, la tan esperada regla de rotación, pues los factores predominantes que intervienen en este caso son la forma del fondo de la pila y sus irregularidades, y no la rotación de la Tierra.

Por esta razón, a la pregunta planteada hay que responder del modo siguiente: es imposible predecir en qué sentido girará el vórtice de agua junto al orificio situado en el fondo de la pila, ya que éste depende de toda una serie de circunstancias difíciles de considerar. Además, los torbellinos que se crean en el flujo de líquido y que pudieran atribuirse a la rotación del Globo, deben de tener, según comprueba el cálculo, un diámetro mucho mayor que los pequeños remolinos que surgen en torno al orificio de vaciado de un recipiente. Por ejemplo, en la latitud de San Petersburgo, para la velocidad de corriente de 1 m/s, el diámetro de semejante torbellino debería ser de 18 m; para la velocidad de 0,5 m/s, de 9 m, etc., es decir, variaría en razón directa a la velocidad de corriente.

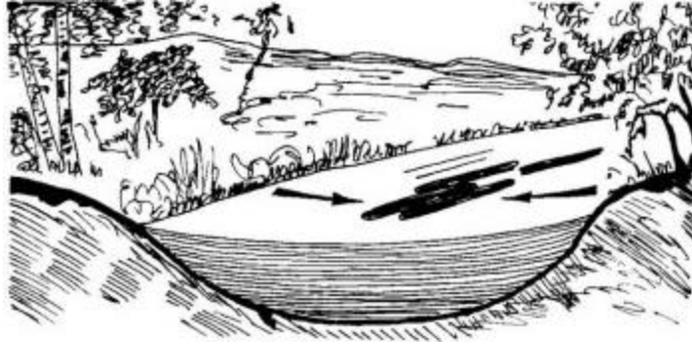
Como colofón vamos a acotar algo más sobre la supuesta influencia de la rotación del planeta en el funcionamiento de las turbinas hidráulicas. Teóricamente, se podría demostrar que toda rueda que gira, es incitada por la rotación de la Tierra a ocupar una posición tal que su eje sea paralelo al del planeta, y que el sentido de giro de ambos cuerpos sea igual. No obstante, el efecto de semejante influencia es ínfimo, al igual que en el caso del embudo de agua formado en el recipiente que se vacía; en otras palabras, la acción del giro de la Tierra constituye menos de una cienmilésima parte de la fuerza de la gravedad. Por consiguiente, toda irregularidad de forma del cuerpo de la turbina que gira, por más insignificante que sea, de por sí muy natural e inevitable, debe influir mucho más y camuflar la influencia que el giro del Globo ejerce sobre dicho artefacto. Por lo tanto, no se han de cifrar muchas esperanzas en que la rotación de la Tierra contribuya ostensiblemente al funcionamiento de los mecanismos.

75. La riada y el estiaje.

¿Por qué en tiempo de riada la superficie del río es convexa, mientras que durante el estiaje es cóncava?



La Superficie del río durante la crecida



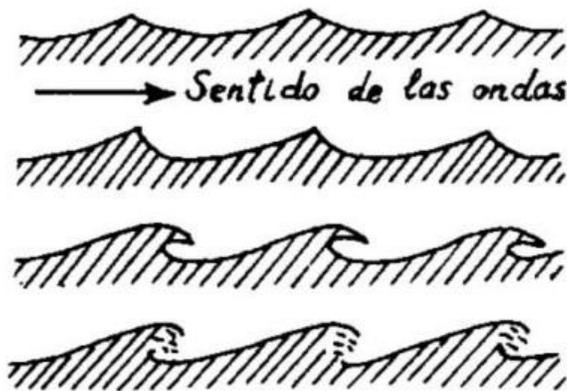
La superficie del río durante el estiaje

El hecho de que en épocas de crecida y estiaje la superficie de los ríos no es estrictamente horizontal, se debe a que la parte central, o axial, de la masa de agua corriente tiene velocidad mayor que las partes cercanas a la orilla; la corriente es más rápida en medio del río que junto a las márgenes. Por consiguiente, durante la crecida, cuando desde la parte alta del río viene mucha agua, su grueso fluye a lo largo de la línea central del cauce; a consecuencia de esto el río «se abulta» en su parte media. Al contrario, durante el estiaje, mientras el caudal es pequeño (pues la mayor parte del agua ya está en la cuenca baja) su nivel disminuye más rápido a lo largo de la línea media que junto a las orillas, por lo que la superficie del río se vuelve cóncava.

Este fenómeno es muy notable en los ríos caudalosos y muy anchos. «En el Mississipí -dice el escritor y geógrafo francés J. Reclus en su obra *La Terre, description des phénomènes de la vie du globe-*, la convexidad transversal que se forma durante la crecida es de un metro por término medio...; las maderas que se transportan por flotamiento en esta época “se deslizan” de la parte central prominente del río y quedan en la orilla, mientras que en el estiaje siempre flotan aguas abajo por su parte central y se acumulan en la depresión formada en medio del río.»

76. El oleaje.

¿Por qué se curvan las crestas de las olas que lamen la costa?



Las crestas de las olas que lamen la costa, tienen forma curvada

El encorvamiento de las crestas de olas que lamen la costa suave se debe a que la velocidad con que viajan por la superficie de aguas someras depende de la profundidad, a saber, está en razón directa con la raíz cuadrada del valor de la profundidad. Cuando las olas se propagan por encima de los bajos de mar, la elevación de sus crestas respecto al fondo es mayor que la de los valles de

onda; por consiguiente, las crestas avanzan más veloces que los valles que les preceden y, adelantándose a ellos, se curvan hacia adelante.

Este mismo hecho explica la causa de otro fenómeno que se observa en el mar agitado: las olas que baten la costa siempre son paralelas a ésta. La causa radica en que cuando se acercan hacia la orilla bajo un ángulo formando barreras paralelas, las que pasan por encima del bajío cercano a la orilla antes que las otras, aminoran su paso. Es fácil ver que a consecuencia de este fenómeno la línea de olas debe cambiar la dirección de su movimiento hasta que sea paralela a la costa.

77. El problema de Colladon.

El célebre físico Jean-Daniel Colladon planteó a los estudiantes de la Academia de Ingeniería de París el problema siguiente:

«Un barco se desplazó por el Ródano aguas arriba elevándose a 170 m (desde Marsella hasta Lyon). Para calcular el trabajo realizado durante el viaje, ¿habrá que tener en cuenta también el producto del peso del barco por la altura de 170 m, además de la resistencia de la corriente?»

La superficie del río se asemeja a un plano inclinado, por eso se podría suponer que al navegar aguas arriba el barco debe realizar la misma cantidad de trabajo que un cuerpo deslizando hacia arriba por un plano inclinado. Pero no debemos olvidar que el empuje del agua equilibra el peso del barco que navega. Para elevarlo a un nivel más alto no se necesita realizar ningún trabajo y no vale la pena tomar en consideración a este último.

Lo notable es que entre los estudiantes de la academia que tuvieron que resolver este problema, uno solo dio la respuesta correcta; posteriormente aquel estudiante se hizo un ingeniero de ferrocarriles muy famoso en Francia.